**Option : Spéciales C**

ÉCOLE SUPÉRIEURE DE L'ÉNERGIE ET DES MATÉRIAUX

***Préliminaires et notations :***

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, fixé. On note :

$\mathcal{M} = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ : l'algèbre des matrices réelles carrées d'ordre $n$.
$\mathcal{C} = (e_1, ..., e_n)$ : la base canonique de $\mathbb{R}^n$ (où $\mathbb{R}^n$ pourra être identifié selon l'usage à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$).
$[\![1, n]\!]$ : l'ensemble des entiers compris entre 1 et $n$.
O : la matrice de $\mathcal{M}$ dont tous les coefficients valent 0.
I : la matrice diagonale de $\mathcal{M}$ dont tous les coefficients diagonaux valent 1.

Pour A dans $\mathcal{M}$, on notera :
$Sp_{\mathbf{K}}(A)$ l'ensemble des valeurs propres de A dans $\mathbf{K}$, où $\mathbf{K}$ désigne l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
${}^tA$ la matrice transposée de A.

Enfin si $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite de matrices de $\mathcal{M}$, nous dirons qu'elle converge vers B dans $\mathcal{M}$, si les $n^2$ suites réelles définies par les coefficients des matrices $A_k$ convergent vers les coefficients respectifs de B : c'est-à-dire que, pour tous $i$ et $j$ dans $[\![1, n]\!]$, si $a_{i,j}^{(k)}$ est le coefficient d'indice $(i, j)$ de la matrice $A_k$ et $b_{i,j}$ celui de B, on a : $\lim_{k \to +\infty} [a_{i,j}^{(k)}] = b_{i,j}$.

On pourra noter alors : $B = \lim_{k \to +\infty} (A_k)$.

## PREMIÈRE PARTIE — Étude d'une sous-algèbre de $\mathcal{M}$

I. 1. On note U la matrice de $\mathcal{M}$ dont tous les coefficients valent $\frac{1}{n}$, et $V = I - U$.

*a.* Calculer $U^2$, $V^2$, $U \cdot V$ et $V \cdot U$.

*b.* Préciser le rang des matrices U et V.

*c.* Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de U et ceux de V.

*d.* On note $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$ avec : $\varepsilon_k = e_k - e_{k+1}$ pour les entiers $k$ tels que $1 \leqslant k < n$, et $\varepsilon_n = e_1 + ... + e_n$. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^n$, et écrire P : la matrice de passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{B}$.

*e.* Expliciter (si possible, sans calculs) les matrices $P^{-1} \cdot U \cdot P$ et $P^{-1} \cdot V \cdot P$.

*f.* Dans cette question seulement, on prend $n = 4$. Préciser $P^{-1}$.

I. 2. On note $\mathcal{E} = \{\alpha \cdot U + \beta \cdot V,\ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}$.

*a.* Expliquer pourquoi $\mathcal{E}$ est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{M}$, et (U, V) une base de $\mathcal{E}$ (considéré comme espace vectoriel réel).

*b.* Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et $A = \alpha \cdot U + \beta \cdot V$. Pour tout $k$ dans $\mathbb{N}$, exprimer $A^k$ en fonction de U et de V. Dire à quelle condition A est inversible, et dans ce cas, exprimer, pour $k$ dans $\mathbb{Z}$, $A^k$ en fonction de U et de V.

*c.* Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\alpha \neq \beta$, et $A = \alpha \cdot U + \beta \cdot V$.

Montrer l'existence et l'unicité de $(\gamma, \delta) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $A^2 + \gamma \cdot A + \delta \cdot I = O$.

DEUXIÈME PARTIE **Matrices stochastiques**

On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des matrices $A = (a_{i,j})$ de $\mathcal{M}$ telles que :

(1) $\forall\, i, j \in [\![1, n]\!], \quad a_{i,j} \geqslant 0$.

(2) $\forall\, i \in [\![1, n]\!], \quad \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$.

II. 1. Un exemple : soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ avec $\beta \neq 0$, et $A = \alpha \cdot I + \beta \cdot U$ (où U est définie en I.1.).

*a.* Donner des conditions nécessaires et suffisantes pour que A soit dans $\mathcal{S}$.

*b.* Montrer alors en particulier que $\alpha \in ]-1, 1]$.

*c.* On suppose ici que A est dans $\mathcal{S}$, et $\alpha \neq -1$. Déterminer $\lim_{k \to +\infty} (A^k)$.

*d.* On suppose ici que A est dans $\mathcal{S}$, et $\alpha = -1$. Calculer alors $n$ et $\beta$, et préciser $A^k$ pour tout $k$ dans $\mathbb{N}$.

*e.* Soit $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Étudier si A est diagonalisable, et préciser ses valeurs propres. Déterminer $\lim_{k \to +\infty} (A^k)$.

On revient maintenant au cas général :

II. 2. Montrer que pour toutes matrices A et B de $\mathcal{S}$, et tout réel $\lambda$ de $[0, 1]$, alors la matrice $\lambda \cdot A + (1 - \lambda) \cdot B$ est dans $\mathcal{S}$ (c'est-à-dire que $\mathcal{S}$ est une partie convexe de $\mathcal{M}$).

II. 3. Montrer que pour toute suite $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de matrices de $\mathcal{S}$, convergeant vers B dans $\mathcal{M}$, alors B est dans $\mathcal{S}$ (c'est-à-dire que $\mathcal{S}$ est une partie fermée de $\mathcal{M}$).

II. 4. Montrer que $\mathcal{S}$ est une partie de $\mathcal{M}$, stable pour la multiplication matricielle.

II. 5. Soit $G = \{A \in \mathcal{S} / A \cdot {}^tA = I\}$. Montrer que l'on peut construire une bijection entre G et $\mathcal{S}_n$, où $\mathcal{S}_n$ est l'ensemble des permutations de $[\![1, n]\!]$.

TROISIÈME PARTIE **Éléments propres des matrices stochastiques**

Soit A dans $\mathcal{S}$. On note toujours $a_{i,j}$ le coefficient de A d'indice $(i, j)$ situé dans la $i$-ème ligne et $j$-ème colonne de A (pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$).

III. 1. *a.* Montrer que 1 est valeur propre de A.

*b.* Montrer que $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ est inclus dans $\{z \in \mathbb{C} / |z| \leqslant 1\}$.

Pour traiter cette question, il pourra être utile de considérer pour $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$, un vecteur $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, non nul, tel que $A \cdot Y = \lambda \cdot Y$, puis : $\max \{|y_h|, h \in [\![1, n]\!]\}$.

III. 2. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$. Justifier qu'il existe $p \in [\![1, n]\!]$ tel que : $|\lambda - a_{p,p}| \leqslant 1 - a_{p,p}$.

III. 3. On suppose ici que : $a_{h,h} > \frac{1}{2}$, pour tout $h \in [\![1, n]\!]$. Montrer que A est inversible.

III. 4. On suppose ici que pour tout $h \in [\![1, n]\!]$ on a : $a_{h,h} > 0$.

*a.* Montrer qu'il existe un réel $\alpha \in ]0, 1]$ tel que $Sp_{\mathbb{C}}(A)$ soit inclus dans :

$$\{z \in \mathbb{C} / |z - \alpha| \leqslant 1 - \alpha\}.$$

Interpréter géométriquement le résultat précédent et faire la figure correspondante.

*b.* Que peut-on dire du module d'éventuelles valeurs propres de A, différentes de 1 ?

III. 5. On suppose ici que pour tous $i$ et $j$ dans $[\![1, n]\!]$ on a : $a_{i,j} > 0$.

Montrer que les éventuelles autres valeurs propres (complexes) de A autres que 1, sont de module strictement inférieur à 1, et préciser le rang de la matrice $(A - I)$.

III. 6. Soit $\lambda \in Sp_{\mathbb{C}}(A)$, avec $|\lambda| = 1$.

*a.* Soit $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, non nulle telle que $A \cdot Y = \lambda \cdot Y$.

En utilisant $M = \max\{|y_h|, h \in [\![1, n]\!]\}$, construire par récurrence une application $\varphi$ de $\mathbb{N}$ dans $[\![1, n]\!]$ telle que pour tout $k$ dans $\mathbb{N}$ : $y_{\varphi(k+1)} = \lambda \cdot y_{\varphi(k)}$ et $|y_{\varphi(k)}| = M$.

Pour cela, on pourra justifier et utiliser le lemme suivant :

Soient $z_1, ..., z_n$ $n$ nombres complexes ; si $\left| \sum_{j=1}^{n} z_j \right| = \sum_{j=1}^{n} |z_j|$, alors il existe un complexe $z$ et des réels positifs $t_1, ..., t_n$ tels que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ on ait : $z_i = t_i \cdot z$.

*b.* En déduire qu'il existe un entier $m$ compris entre 1 et $n$, tel que $\lambda^m = 1$.

## QUATRIÈME PARTIE — Convergence

Soit A dans $\mathcal{S}$. On s'intéresse dans cette partie à la convergence éventuelle de la suite $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $a_{i,j}^{(k)}$ le coefficient d'indice $(i, j)$ de $A^k$ (pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$).

IV. 1. *a.* La suite $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$ peut-elle converger si A possède une valeur propre $\lambda$ de module 1, différente de 1 ? Pour répondre à cette question, on pourra considérer Y dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, non nulle telle que $A \cdot Y = \lambda \cdot Y$, et s'intéresser aux composantes de $A^k \cdot Y$...

*b.* Montrer que si la suite $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers B dans $\mathcal{M}$, alors B est dans $\mathcal{S}$, et $B^2 = B$.

*c.* Lorsque $n = 2$, donner toutes les possibilités de matrices B.

*d.* On suppose ici que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et qu'elle ne possède pas d'autres valeurs propres de module 1 mis à part 1. Montrer que la suite $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge.

IV. 2. On suppose ici que, pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$, $a_{i,j} > 0$.

Notons : $\varepsilon = \min\{a_{i,j} / i, j \in [\![1, n]\!]\}$, avec ici $\varepsilon > 0$.

Pour tout $k$ dans $\mathbb{N}$, et tout $j$ dans $[\![1, n]\!]$, on note :

$$\alpha_j^{(k)} = \min\{a_{i,j}^{(k)} / i \in [\![1, n]\!]\}, \quad \beta_j^{(k)} = \max\{a_{i,j}^{(k)} / i \in [\![1, n]\!]\}, \quad \delta_j^{(k)} = \beta_j^{(k)} - \alpha_j^{(k)}.$$

*a.* Montrer que pour tout $k$ dans $\mathbb{N}$, et tout $j$ dans $[\![1, n]\!]$, on a :

$$\alpha_j^{(k)} \leqslant \alpha_j^{(k+1)} \leqslant \beta_j^{(k+1)} \leqslant \beta_j^{(k)}; \qquad \delta_j^{(k+1)} \leqslant (1 - 2 \cdot \varepsilon) \cdot \delta_j^{(k)}.$$

*b.* En déduire que $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge. Si $B = \lim_{k \to +\infty} (A^k)$, comparer les lignes de B.

IV. 3. Dire dans chacun des cinq cas suivants, en faisant si possible un minimum de calculs (seule la réponse argumentée : oui ou non, est récompensée), si la suite $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge :

(i) $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ; (ii) $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ; (iii) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ;

(iv) $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ ; (v) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

CINQUIÈME PARTIE **Un exemple de chaîne de Markov**

Les variables aléatoires entières considérées ci-dessous sont supposées définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{P})$.

Un pion peut être déplacé sur un échiquier à quatre cases $C_1, C_2, C_3$ et $C_4$. Il se déplace de l'une des cases vers l'une quelconque des trois autres cases équiprobablement, sauf s'il se trouve en $C_4$, auquel cas il y reste (on peut considérer qu'il se déplace de $C_4$ en $C_4$).

À l'instant initial le pion est en $C_1$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $X_k$ la variable aléatoire égale au numéro de la case occupée par le pion à l'issue de son $n$-ième déplacement, avec : $X_0 = 1$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose : $Y_k = \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \\ d_k \end{pmatrix}$ où :

$$a_k = \mathbf{P}(X_k = 1); \quad b_k = \mathbf{P}(X_k = 2); \quad c_k = \mathbf{P}(X_k = 3); \quad d_k = \mathbf{P}(X_k = 4).$$

V. 1. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$. Justifier que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad Y_{k+1} = A \cdot Y_k .$$

V. 2. Déterminer la loi de la variable aléatoire $X_2$, son espérance et son écart type.

V. 3. *a.* Justifier les relations :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad d_{k+1} = \frac{2}{3}(d_k - 1) + 1, \quad a_{k+2} = \frac{1}{3} a_{k+1} + \frac{2}{9} a_k, \quad b_k = c_k .$$

*b.* En déduire la loi de $X_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

V. 4. En considérant les matrices : $A - I$, $A - \frac{2}{3}I$ et $A + \frac{1}{3}I$, justifier que A est diagonalisable.

V. 5. Étudier la convergence des suites $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$, $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$, $(c_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(d_k)_{k \in \mathbb{N}}$, et interpréter ce résultat.

V. 6. Soit T la variable aléatoire égale au nombre de déplacements nécessaires pour que le pion atteigne la case $C_4$ s'il l'atteint, et égale à 0 s'il ne l'atteint jamais.

*a.* Déterminer la loi de T.

*b.* Montrer que T admet une espérance E (T), et que celle-ci est donnée par la formule :

$$E(T) = \sum_{j \geq 0} \mathbf{P}(T > j), \text{ et préciser la valeur de } E(T).$$

*c.* On considère la série entière définie par : $G(z) = \sum_{j \geq 0} \mathbf{P}(T = j) \cdot z^j$.

Expliciter $G(z)$, préciser son rayon de convergence, et retrouver E (T) grâce à G.